

Problème 20: Phases de Poules / Complexe

La Coupe du Monde de Football 2022 commence bientôt.
Les phases de poules se dérouleront ainsi:

- Une poule sera constituée de 4 équipes
- Chaque pays affrontera une fois ses trois adversaires
- Une Victoire rapporte 3 points
- Un Match Nul rapporte 1 point
- Une Défaite ne rapporte aucun point
- Les deux équipes en tête sont qualifiées pour la phase finale



Voici un exemple de classement une fois tous les match joués:

Équipe	Points
France	7
Danemark	7
Australie	3
Tunisie	0

Dans ce scénario, la Tunisie a perdu tous ses matchs et l'Australie a perdu contre le Danemark et la France, qui ont fait match nul.

Combien de dispositions différentes du classement sont possibles ?

Précision: On s'intéressera uniquement aux points, on ne fera par exemple pas de distinction entre une victoire (qui rapporte 3 points) et 3 matchs nuls (qui rapportent 3 fois un point). On s'intéressera uniquement au classement des points, c'est-à-dire qu'un même classement où seule la position des équipes a changé sera compté comme une seule possibilité. Par exemple, ces deux tableaux ne sont comptabilisés que comme un seul:

Tableau 1

Équipe	Points
France	7
Danemark	7
Australie	3
Tunisie	0

Tableau 2

Équipe	Points
Tunisie	7
Danemark	7
Australie	3
France	0

Solution:

Si l'équipe finissant première gagne tous ses matchs, elle aura 9 points. Les autres équipes remporteront donc tous leurs points au cours de leurs affrontements entre elles. Or, il y a 7 possibilités quant aux affrontements entre 3 équipes:

- 6,3,0
- 6,1,1
- 4,4,0
- 4,3,1
- 4,2,1
- 3,3,3
- 2,2,2

Donc, si la première équipe a 9 points, il y a 7 possibilités.

On ne peut pas avoir 8 points en 3 matchs.

Si la première équipe a 7 points, elle a remporté 2 matchs et fait match nul. Il y a donc une équipe qui a déjà un point.

Prenons toutes les possibilités précédemment répertoriées, et ajoutons 1 point partout où nous le pouvons. Il y a donc 13 possibilités quant aux affrontements entre 3 équipes si une équipe a déjà 1 point:

- 7,3,0
- 6,4,0
- 6,3,1
- 7,1,1
- 6,2,1
- 5,4,0
- 4,4,1
- 5,3,1
- 4,3,2
- 5,2,1
- 4,2,2
- 4,3,3

- 3,2,2

Donc, si la première équipe a 7 points, il y a 13 classements possibles.

Si la **première équipe** a 6 points, c'est qu'elle a remporté deux de ses matchs, et perdu l'autre. Il y a donc une équipe qui a déjà trois points.

Prenons toutes les possibilités précédemment répertoriées, et ajoutons 3 points partout où nous le pouvons. On s'assurera cependant que cela ne porte jamais le total de points d'une équipe au-dessus de 6, puisque l'équipe en première place a 6 points. Il y a donc 7 possibilités quant aux affrontements entre 3 équipes si une équipe a déjà 3 points:

- 6,6,0
- 6,3,3
- 6,4,1
- 4,4,3
- 5,4,1
- 4,4,2
- 5,2,2

Donc, si la première équipe a 6 points, il y a 7 classements possibles.

Si la première équipe a 5 points, il y a 5 possibilités de classement des 3 autres équipes:

- 5,3,3
- 5,5,2
- 5,4,3
- 5,4,4
- 5,5,3

Donc, si la première équipe a 5 points, il y a 5 classements possibles.

Si la première équipe a 4 points, il y a une seule possibilité quant au classement des autres équipes: 4,4,4. Ce classement apparaît quand chaque équipe remporte une victoire, un nul et une défaite.

De même, si l'équipe en première position remporte 3 points, c'est que toutes les équipes ont 3 points, et n'ont fait que des matchs nuls.

Donc, si la première équipe a strictement moins de 5 points, il y a 2 classements possibles.

$$7+13+7+5+2=34$$

Au total, il y a donc 34 classements possibles. Les voici:

- 9,6,3,0
- 9,6,1,1
- 9,4,4,0
- 9,4,3,1
- 9,4,2,1
- 9,3,3,3
- 9,2,2,2
- 7,7,3,0
- 7,6,4,0
- 7,6,3,1

- 7,7,1,1
- 7,6,2,1
- 7,5,4,0
- 7,4,4,1
- 7,5,3,1
- 7,4,3,2
- 7,5,2,1
- 7,4,2,2
- 7,4,3,3
- 7,3,2,2
- 6,6,6,0
- 6,6,3,3
- 6,6,4,1
- 6,4,4,3
- 6,5,4,1
- 6,4,4,2
- 6,5,2,2
- 5,5,3,3
- 5,5,5,2
- 5,5,4,3
- 5,5,4,4
- 5,5,5,3
- 4,4,4,4
- 3,3,3,3